EXERCICE 1. 1,5 points

Déterminer les entiers naturels qui, dans la division euclidienne par 4, donnent un quotient égal au reste.

EXERCICE 2. 1,5 points

On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Quel est cet entier naturel n?

EXERCICE 3. 2 points

La différence de deux entiers est égale à 399.
Lorsqu'on divise l'un par l'autre, le quotient est 15 et le reste est 21.
Quels sont ces entiers?

EXERCICE 4. 3,5 points

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, la fraction $\dfrac{n+17}{n-4}$ est-elle un nombre entier?

EXERCICE 5. 5 points

Déterminer les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tels que $x^2 - 8xy = 17$.

EXERCICE 6. 5 points

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

CORRIGÉ 1 Soit $n \in \mathbb{N}$.
La division euclidienne de $n \in \mathbb{N}$ par 4 donne l'existence et l'unicité de $q, r \in \mathbb{N}$ tels que:
$n = 4q + r$ avec $0 \leq r \leq 3$
$q = r = 0$ donne $n = 0$
$q = r = 1$ donne $n = 5$
$q = r = 2$ donne $n = 10$
$q = r = 3$ donne $n = 15$

CORRIGÉ 2 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les divisions euclidiennes de $n \in \mathbb{N}$ par 152 et par 147 donnent l'existence et l'unicité de $q \in \mathbb{N}$ tel que:
$n = 152q + 13$ (on a bien $13 < 152$) et $n = 147q + 98$ (on a bien $98 < 147$)
Par différence membre à membre, on a:
$n - n = (152q + 13) - (147q + 98)$ soit $0 = 5q - 85$ soit $q = 17$
On a $152 \times 17 + 13 = 147 \times 17 + 98 = 2597$

CORRIGÉ 3 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les divisions euclidiennes de $n \in \mathbb{N}$ par 152 et par 147 donnent l'existence et l'unicité de $q \in \mathbb{N}$ tel que:
$n = 152q + 13$ (on a bien $13 < 152$) et $n = 147q + 98$ (on a bien $98 < 147$)
Par différence membre à membre, on a:
$n - n = (152q + 13) - (147q + 98)$ soit $0 = 5q - 85$ soit $q = 17$
On a $152 \times 17 + 13 = 147 \times 17 + 98 = 2597$

CORRIGÉ 4 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 4$.
$\dfrac{n+17}{n-4} \in \mathbb{N} \iff n - 4 | n + 17$
Or $n - 4 | n - 4$ donc $n - 4 | n + 17 \implies n - 4 | (n + 17) - (n - 4)$
$\implies n - 4 | 21$
$\implies n - 4 \in \{-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21\}$
$\implies n \in \{-17; -3; 1; 3; 5; 11; 25\}$
$\implies n \in \{1; 3; 5; 7; 11; 25\}$ car $n \in \mathbb{N}$

CORRIGÉ 5 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$.
$x^2 - 8xy = 17 \iff (-x)^2 - 8(-x)(-y) = 17$, ce qui montre que $(x; y)$ solution $\iff (-x; -y)$ solution
On peut donc chercher les couples $(x; y)$ solutions tels que $x \geq 0$ OU $y \geq 0$ (mais pas $x \geq 0$ ET $y \geq 0$ car on raterait les couples $(x; y)$ de signes contraires)
On a $x^2 - 8xy = 17 \iff x(x - 8y) = 17$
En cherchant les solutions $(x; y)$ dans $\mathbb{Z}$ avec $y \in \mathbb{N}$, on a alors $y \geq 0$ donc $x \geq x - 8y$.
Donc $x(x - 8y) = 17 \implies \Big(x - 8y = 1 \text{ et } x = 17\Big)$ OU $\Big(x - 8y = -17 \text{ et } x = -1\Big)$
On vérifie que $(17; 2)$ et $(-1; 2)$ sont des solutions, et que ces couples vérifient bien $y \in \mathbb{N}$:
$y = 2 \in \mathbb{N}$ et $17^2 - 8 \times 17 \times 2 = 17(17 - 8 \times 2) = 17 \times 1 = 17$
$y = 2 \in \mathbb{N}$ et $(-1)^2 - 8 \times (-1) \times 2 = 1 + 16 = 17$.
On peut donc trouver toutes solutions dans $\mathbb{Z}$ en revenant à la remarque $(x; y)$ solution $\iff (-x; -y)$ solution
Finalement, il y a quatre couples solutions: $(17; 2)$, $(-1; 2)$, $(-17; -2)$, $(1; -2)$

CORRIGÉ 6